BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О НОРМАХ ОПЕРАТОРОВ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.С.МИРЗОЕВ, С.Ф.МАМЕДБЕЙЛИ

Бакинский Государственный Университет

mirzoyevsabir@mail.ru

В работе найдены точные значения норм операторов промежуточных производных в пространствах типа Соболева, норма которых дается через главную часть некоторого операторно-дифференциального выражения эллиптического типа. Указан алгоритм нахождения нормы промежуточных производных с коэффициентами операторно-дифференциального выражения.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторно-дифференциальное выражение

$$P_0\left(\frac{d}{dt};A\right)\equiv\left(\frac{d}{dt}-\omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt}-\omega_2 A\right)u\,, \tag{1}$$

где $u(t)$-вектор-функция со значениями в H, производные понимаются в смысле теории обобщенных функций [1], а коэффициенты удовлетворяют условиям:

a) ω_1 и ω_2 - числа, причем $Re\,\omega_1<0,\ Re\,\omega_2>0$,

b) A - положительно-определенный самосопряженный оператор.

Обозначим через $H_\gamma=D(A^\gamma),\ (x,y)_\gamma=(A^\gamma x,A^\gamma y),\ \gamma\ge 0$. Пусть $L_2(R_+;H)$-гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$ со значениями в H, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^\infty\|f(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Далее, определим пространства [1]

$$W_2^2(R_+;H)=\left\{u:\ u''\in L_2(R_+;H),\ A^2u\in L_2(R_+;H)\right\},$$

$$W_2^2(R_+;H;0{,}1)=\left\{u:\ u\in W_2^2(R_+;H),\ u(0)=0,\ \ u'(0)=0\right\},$$

и

$$W_2^2(R_+;H;0)=\left\{u:\ u\in W_2^2(R_+;H),\ u(0)=0\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R;H)}=\left(\|u''\|^2_{L_2(R_+;H)}+\|A^2u\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}.$$

Аналогично даются определения пространств $L_2(R;H)$ и $W_2^2(R;H)$, где $R=(-\infty,\infty)$. Имеет место

Теорема 1. Оператор P_0, определенный выражением (1) изоморфно отображает пространство $W_2^2(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Так как уравнение $P_0\left(\frac{d}{dt};A\right)u=0$ имеет общее решение из пространства $W_2^2(R_+;H)$ вида $u_0(t)=e^{\omega_1 tA}\varphi$, где $\varphi\in H_{3/2}$, то из условия $u_0(t)\in W_2^2(R_+;H;0)$ $(u(0)=0)$ следует, что $\varphi=0$. Следовательно, $u_0=0$. С другой стороны, легко проверить, что вектор-функция

$$u_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\xi-\omega_1A)^{-1}(i\xi-\omega_2A)^{-1}\int_0^{\infty}f(s)e^{-i(s-\xi)t}ds\,d\xi,\ \ t\in R(-\infty,\infty),$$

удовлетворяет уравнению $P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=f(t)$ при $t\in R_+$ почти всюду и $u_1(t)\in W_2^2(R_+;H)$.

Обозначим через $\overline{u}_1(t)$ сужение вектор-функции $u_1(t)$ на $[0,\infty)$. Очевидно, что $\overline{u}_1(t)\in W_2^2(R_+;H)$, $\overline{u}_1(0)\in H_{3/2}$. Тогда решение уравнения $P_0u=f$ будет иметь вид: $u(t)=\overline{u}_1(t)-e^{\omega_1 tA}\overline{u}_1(0)$.

Таким образом, образ оператора P_0 совпадает с $L_2(R_+;H)$. Используя теорему о промежуточных производных [1], получаем, что

$$\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}\le const\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}.$$

Тогда утверждение теоремы вытекает из теоремы Банаха об обратном операторе.

Из теоремы 1 следует, что нормы $\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}$ и $\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}$ эквивалентны в пространстве $W_2^2(R_+;H;0)$. Тогда из теоремы о промежуточных производных следует, что конечны нормы

$$N_1(0)=\sup_{0\ne u\in W_2^2(R_+;H;0)}\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\cdot\|P_0u\|^{-1}_{L_2(R_+;H)},\tag{2}$$

$$N_1(0;1)=\sup_{0\ne u\in W_2^2(R_+;H;0;1)}\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\cdot\|P_0u\|^{-1}_{L_2(R_+;H)}.\tag{3}$$

Отметим, что нормы найдены при $\omega_1=-1$ и $\omega_2=1$ в работах [2, 3]. Теперь мы займемся нахождением норм $N_1(0;1)$ и $N_1(0)$. С этой целью, рассмотрим полиномиальный пучок, зависящий от параметра

$$\Phi(\lambda;\beta;A)=(\lambda E-\omega_1 A)(\lambda E-\omega_2 A)(\lambda E+\overline{\omega}_1 A)(\lambda E+\overline{\omega}_2 A)+\beta\lambda^2 A^2,\quad \beta\in(0;\infty). \quad (4)$$

Имеет место

Лемма 1. При $\beta\in[0;d^{-2})$, где $d=\sup\limits_{\xi\in R}\left|\xi P^{-1}(i\xi;1)\right|$, $P(i\xi,1)=(i\xi-\omega_1)(i\xi-\omega_2)$, операторный пучок $\Phi(\lambda;\beta;A)$ не имеет спектр на мнимой оси и представляется в виде

$$\Phi_1(\lambda;\beta;A)=F_1(\lambda;\beta;A)\cdot F_1^{*}(-\overline{\lambda};\beta;A), \quad (5)$$

где

$$F_1(\lambda;\beta;A)=(\lambda E-\eta_1(\beta)A)(\lambda E-\eta_2(\beta)A)=\lambda^2 E+\alpha_1(\beta)\lambda A+\alpha_0(\beta)A^2, \quad (6)$$

причем $\operatorname{Re}\eta_1(\beta)<0,\quad \operatorname{Re}\eta_2(\beta)<0, \operatorname{Re}\alpha_1(\beta)>0.$

Доказательство. При $\mu\in\sigma(A)$ и $\lambda=i\xi,\ \xi\in R$ имеем:

$$\Phi_1(\lambda;\beta;\mu)=P_0(i\xi;\mu)\cdot\overline{P_0(\overline{i\xi};\mu)}-\beta\xi^2\mu^2=\left|P_0(i\xi;\mu)\right|^2-\beta\xi^2\mu^2\geq$$

$$\geq\left|P_0(i\xi;\mu)\right|^2\cdot\left(1-\beta\sup_{\xi\in R}\frac{\xi^2\mu^2}{\left|P_0(i\xi;\mu)\right|^2}\right)\geq$$

$$\geq\left|P_0(i\xi;\mu)\right|^2\cdot\left(1-\beta\sup_{\xi\in R}\left|\frac{\xi^2}{P_0(i\xi;1)}\right|\right)=\left|P_0(i\xi;\mu)\right|^2\cdot\left(1-\beta d^{-2}\right)>0.$$

Таким образом, $\Phi_1(\lambda;\beta;\mu)$ не имеет корней на мнимой оси и из равенства $\Phi_1(\lambda_0;\beta;\mu)=\Phi_1(-\overline{\lambda}_0;\beta;\mu)$ следует, что два его корня лежат в левой полуплоскости и два в правой полуплоскости. Следовательно,

$$\Phi_1(\lambda;\beta;\mu)=F_1(\lambda;\beta;\mu)\cdot\overline{F_1(-\overline{\lambda};\beta;\sigma)},$$

где $F_1(\lambda;\beta;\mu)=(\lambda-\eta_1(\beta))(\lambda-\eta_2(\beta)),\ Re\eta_1(\beta)<0,\ Re\eta_2(\beta)<0.$

Используя спектральное разложение оператора A, получаем утверждение леммы.

Обозначим через $p=-(\omega_1+\omega_2),\ q=\omega_1\omega_2$. Тогда из представлений (5) и (6) получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\alpha_1(\beta)>0,\\ \operatorname{Im}\alpha_1(\beta)=\operatorname{Im}p,\\ 2\operatorname{Re}q-|p|^2+\beta=2\operatorname{Re}\alpha_0(\beta)-|\alpha_1(\beta)|^2,\\ \operatorname{Im}p\overline{q}=\operatorname{Im}\alpha_1(\beta)\overline{\alpha_0(\beta)},\\ |\alpha_0(\beta)|=|q|.\end{cases} \quad (7)$$

Далее, используя соотношения (7) и интегрирование по частям, доказывается

Теорема 2. При $\beta\in[0;d_1^{-2})$ и $u\in W_2^2(R_+;H;0)$ имеет место равенство.

$$\left\|P_0 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta\left\|A\frac{du}{dt}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \mathrm{Re}(\alpha_1(\beta)-p)\cdot\left\|u'(0)\right\|^2_{1/2} + \left\|F_1\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \quad (8)$$

Из этой теоремы следует

Следствие 1. Норма $N_1(0;1) = d_1$.

Действительно, при $u \in W_2^2(R_+;H;0;1)$ $(u(0)=u'(0)=0)$ из (8) получаем, что

$$\left\|P_0 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta\left\|A\frac{du}{dt}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|F_1\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq 0.$$

Следовательно, при $\beta \in \left[0; d_1^{-2}\right)$ и $u \in W_2^2(R_+;H;0;1)$ имеем

$$\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq \beta^{-1/2}\left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Переходя к пределу при $\beta \to d^{-2}$ получаем, что

$$\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq d_1\left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)},$$

т.е. $N_1(0;1) \leq d$. Равенство $N_1(0;1) = d$ доказывается как в работах [2, 3].

Теорема 3. Если уравнение $Re\,\alpha_1(\beta) = Re\,p$ не имеет решения из интервала $(0, d^{-2})$, то $N_1(0) = d$. Если уравнение $Re\,\alpha_1(\beta) = Re(\omega_1 + \omega_2)$ имеет решение из интервала $(0, d^{-2})$, то наименьший из этих корней $\widetilde{\beta}_0 = N_1^{-2}(0)$.

Эта теорема доказывается аналогично теоремам из [2] и [3]. Таким образом, для нахождения нормы $N_1(0)$ мы должны решить уравнение $Re\,\alpha_1(\beta) = Re\,p$ вместе с условиями (7).

Рассмотрим некоторые случаи.

1°. Пусть $Re\,p \leq 0$. Тогда уравнение $Re\,\alpha_1(\beta) = Re\,p$ не имеет решения из интервала $(0, d_1^{-2})$, поскольку $Re\,\alpha_1(\beta) > 0$ (см.(7)). Таким образом, имеет место

Теорема 4. Если $Re\,p = -Re(\omega_1 + \omega_2) \leq 0$, то $N_1(0) = d$.

2°. Предположим, что $\mathrm{Im}\,p = 0,\ \mathrm{Re}\,p < 0$. Тогда из (7) следует, что

$$\mathrm{Im}\,p\cdot\mathrm{Re}\,q + \mathrm{Re}\,p\cdot\mathrm{Im}\,q = \mathrm{Im}\,\alpha_1(\beta)\cdot\mathrm{Re}\,\alpha_0(\beta) + \mathrm{Im}\,\alpha_0(\beta)\cdot\mathrm{Re}\,\alpha_1(\beta) \quad (9)$$

Но $\mathrm{Im}\,\alpha_1(\beta) = \mathrm{Im}\,p = 0$. Поэтому $\mathrm{Re}\,p\cdot\mathrm{Im}\,q = \mathrm{Im}\,\alpha_0(\beta)\cdot\mathrm{Re}\,\alpha_1(\beta)$. Учитывая здесь уравнение $Re\,\alpha_1(\beta) = Re\,p$, имеем $\mathrm{Im}\,q = \mathrm{Im}\,\alpha_0(\beta)$. Тогда

$$Re\,\alpha_0(\beta) = \sqrt{\left|\alpha_0(\beta)\right|^2 - Im^2\,\alpha_0(\beta)} = \sqrt{|q|^2 - Im^2\,q} = \pm|Re\,q|.$$

Учитывая это в (7), получаем

$$2Re\,q - |p|^2 + \beta = 2Re\,\alpha_0(\beta) - |p|^2$$

или

$$\beta = 2Re\alpha_0(\beta) - 2Req = \pm 2|Req| - 2Req.$$

Следовательно, при $\mathrm{Re}q \geq 0,\ \beta = 0,$ т.е. $N_1(0) = d$. Если $Req < 0$, то $\beta_0 = -4Req$, а $N_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{|Req|}}$.

Таким образом, доказана

Теорема 5. Если $Im\,p = 0$, то при $\mathrm{Re}q \geq 0$ $N_1(0) = d$, а при $Req < 0$ $N_1(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{|\mathrm{Re}q|}}$.

Другие случаи также исследуются аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка.// Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
3. Mirzoev S.S. On the norms of operators of intermediate derivatives, Transactions of NAS Azerbaijan, series of phys-tech and mathematic sciences, 2003, v.26, p. 157-165.

ARALIQ TÖRƏMƏ OPERATORLARININ ABSTRAKT FƏZALARDA NORMASI HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, S.F. MƏMMƏDBƏYLİ

XÜLASƏ

Məqalədə Sobolev tipli abstrakt fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi və onların tapılması haqqında teoremlər isbat edilmişdir. Bu normaların tapılması alqoritmi verilmişdir.

ON THE NORMS OF OPERATORS OF INTERMEDIATE DERIVATIVES IN ABSTRACT SPACES

S.S.MIRZAYEV, S.F.MAMMADBAYLI

SUMMARY

The theorems about the exact estimates of norms of intermediate derivatives in some Sobolev type abstract spaces are obtained in the paper. The formulas are given for calculating the norms.